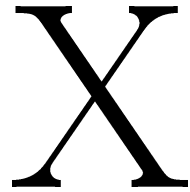




Enseignants: Dovi, Huruguen, Burmeister
Algèbre linéaire - CMS
13 janvier 2023
Durée : 105 minutes



Contrôle 2 (Enoncé)

SCIPER: XXXXXX

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
 - les points indiqués si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes Observe this guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		



Première partie, questions à choix unique

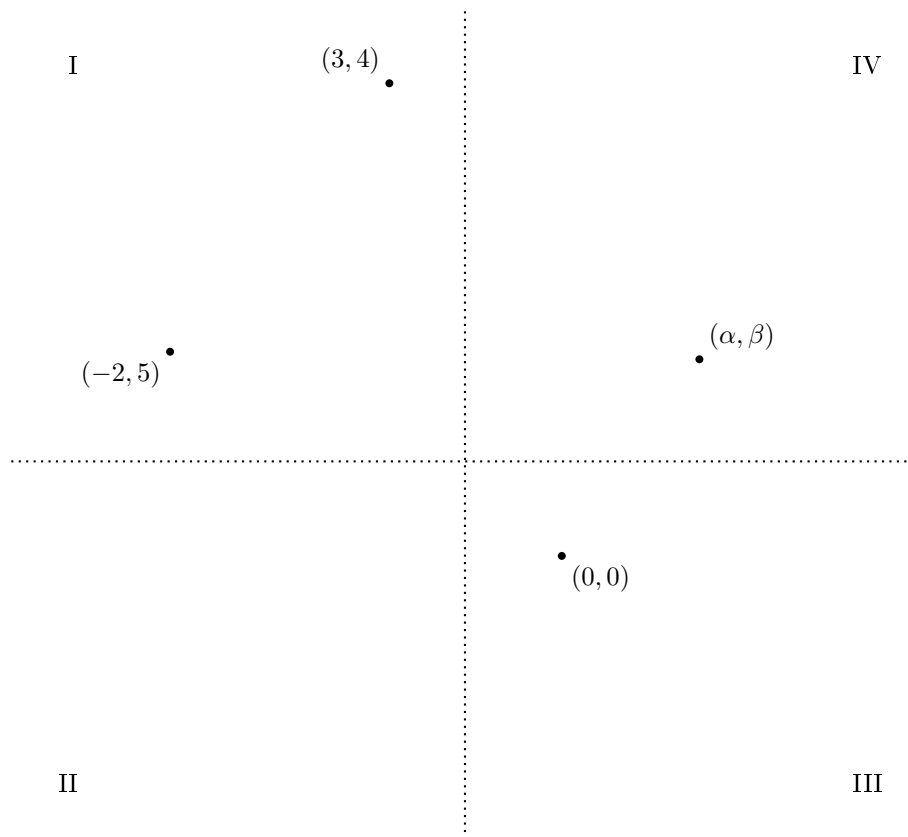
Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Énoncé

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathcal{B} = (-2, 5), (3, 4).$$

Par ailleurs, on visualise $\mathbb{R}^2$ comme ci-dessous (vous pouvez écrire sur le dessin) :



Les deux droites en pointillés découpent le plan en quatre zones numérotées en chiffre romain de I à IV. Par exemple, $(0, 0)$ appartient à la zone III et (α, β) à la zone IV. Dans quelle zone se trouve ...

Question 1 (2 points) ... $(5, -1)$?

☐ III☐ II☐ I☐ IV

Question 2 (2 points) ... $f(-2, 5)$?

☐ I☐ IV☐ II☐ III

Question 3 (2 points) ... $f(\alpha, \beta)$?

☐ II☐ III☐ I☐ IV

**Enoncé**

On considère, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 3 - 2\alpha \\ 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

en base canonique.

Question 4 (2 points) On suppose dans cette question que $\alpha = 4$. Parmi les matrices suivantes, une seule est une forme réduite de f . Laquelle ?

☐ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Question 5 (1 point) On suppose dans cette question que $\alpha = 0$. Parmi les vecteurs suivants, sélectionner celui qui est vecteur propre pour f :

☐ $(1, 1)$

☐ $(1, -3)$

☐ $(3, 1)$

☐ $(1, -1)$

Question 6 (2 points) L'application f est diagonalisable si et seulement si :

☐ $\alpha > 2$

☐ $\alpha < 2$

☐ $\alpha \geq 2$

☐ $\alpha \leq 2$



Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 6 points.*

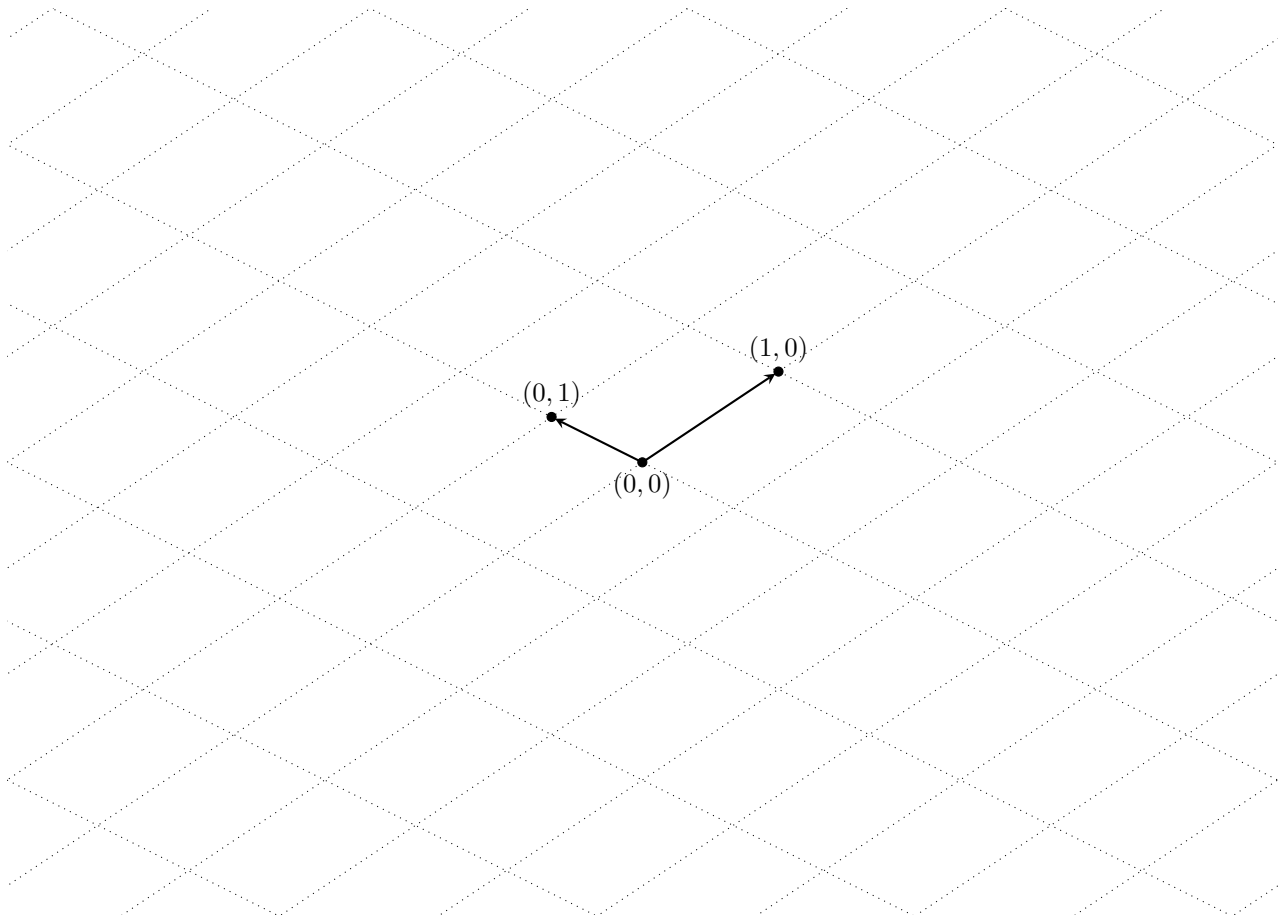
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
	.5	.5	.5	.5	.5	.5	.5
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
0	1	2	3	4	5	6	

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (-x - 3y, 3x + 9y).$$

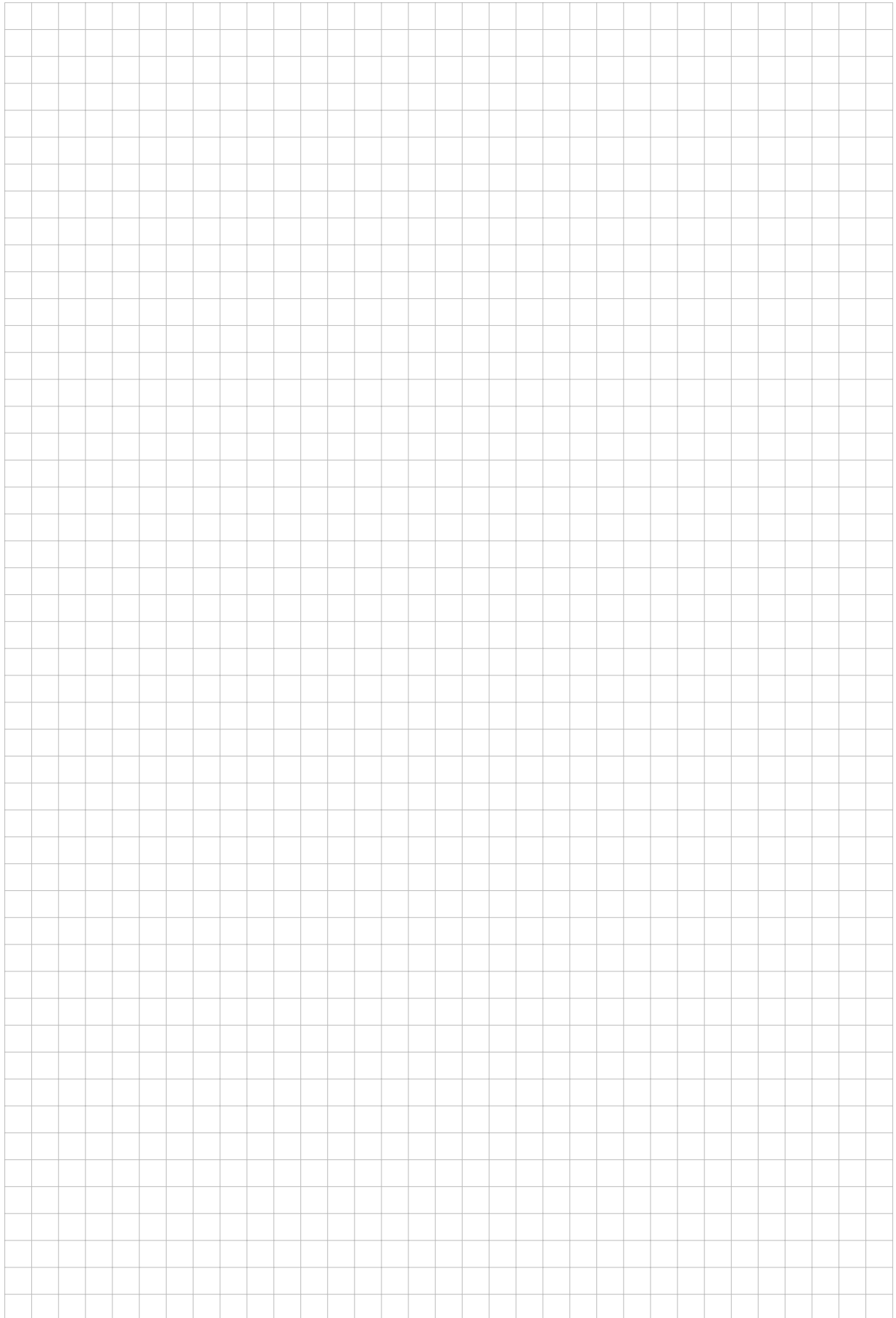
- Déterminer $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ et les représenter sur le dessin ci-dessous dans lequel on a choisi les points du plan représentant les couples $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.
- Déterminer $f^{-1}(\{(2, -6)\})$ et $f^{-1}(\{(1, 3)\})$ et les représenter également sur le dessin ci-dessous.

Données graphiques:



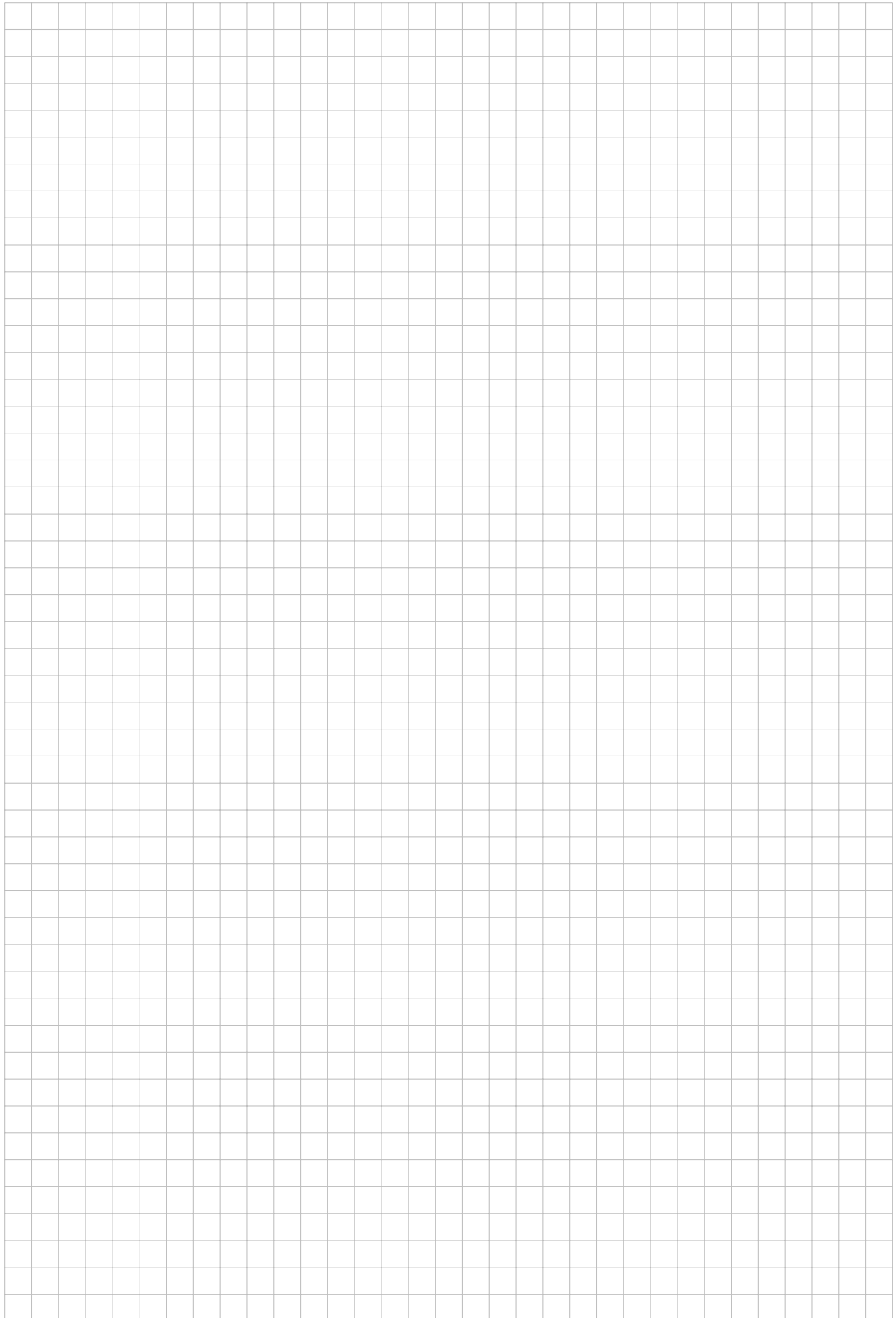


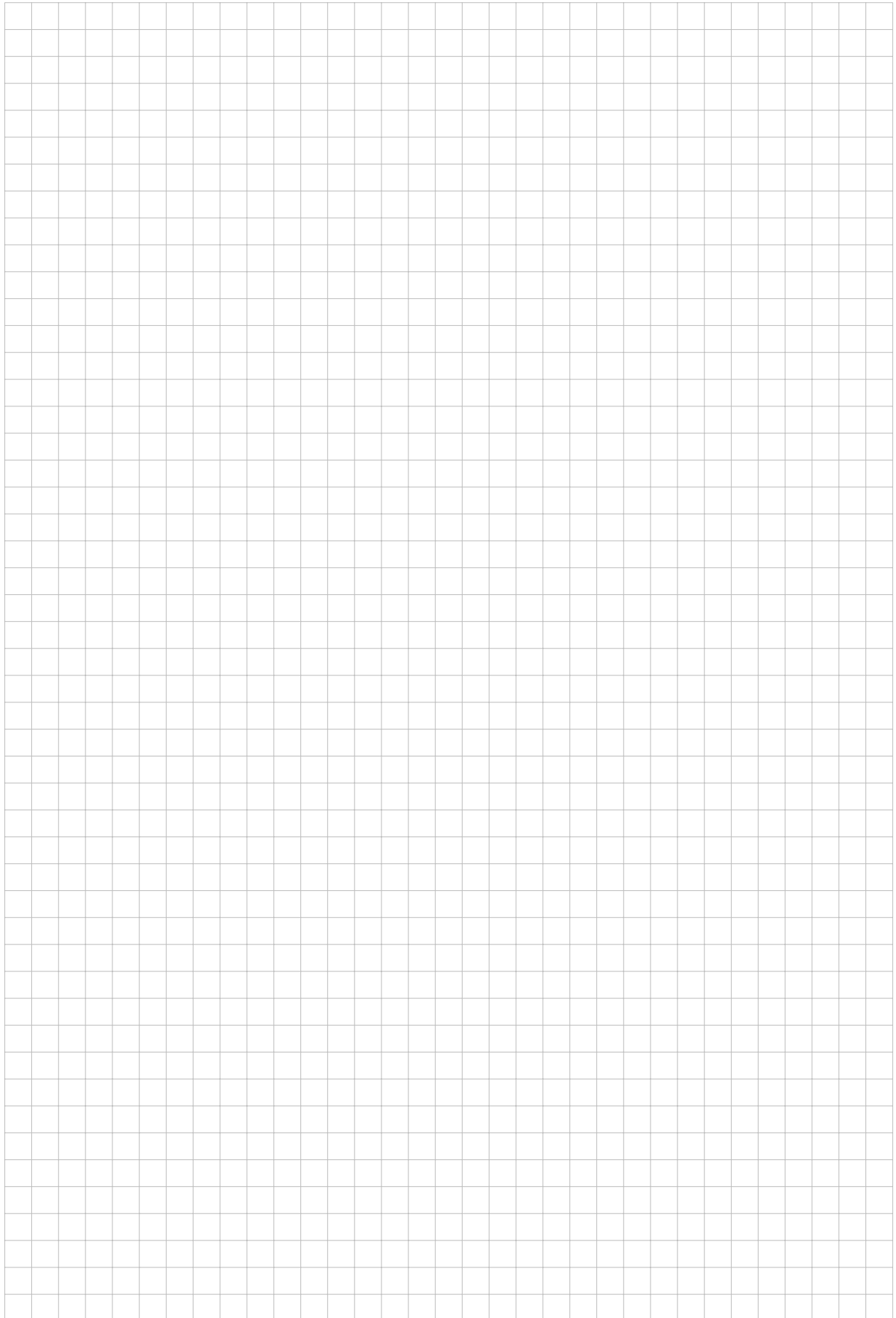
+1/5/56+

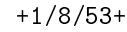




+1/6/55+







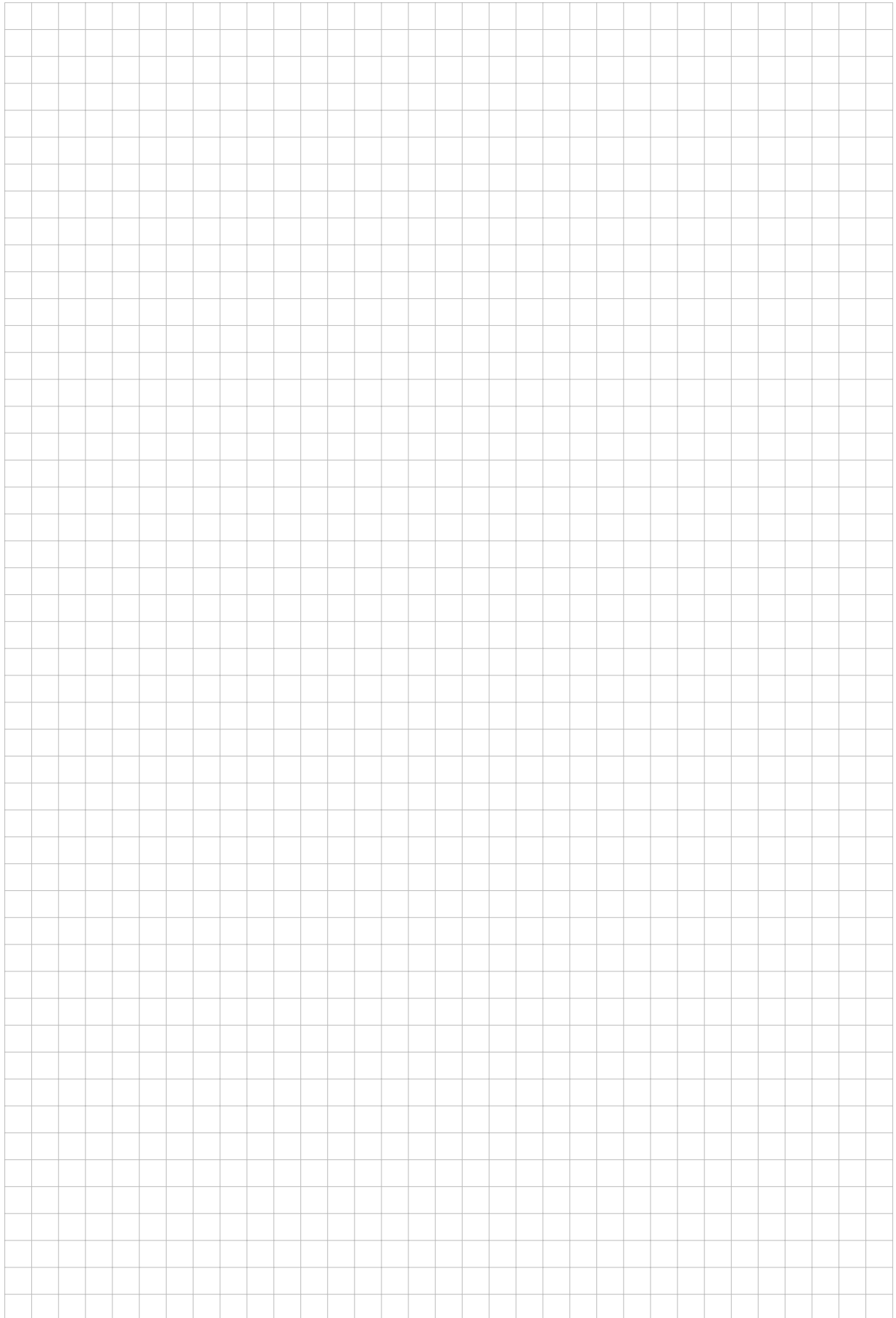
	.5	.5	.5	.5	.5	.5	
0	1	2	3	4	5	6	

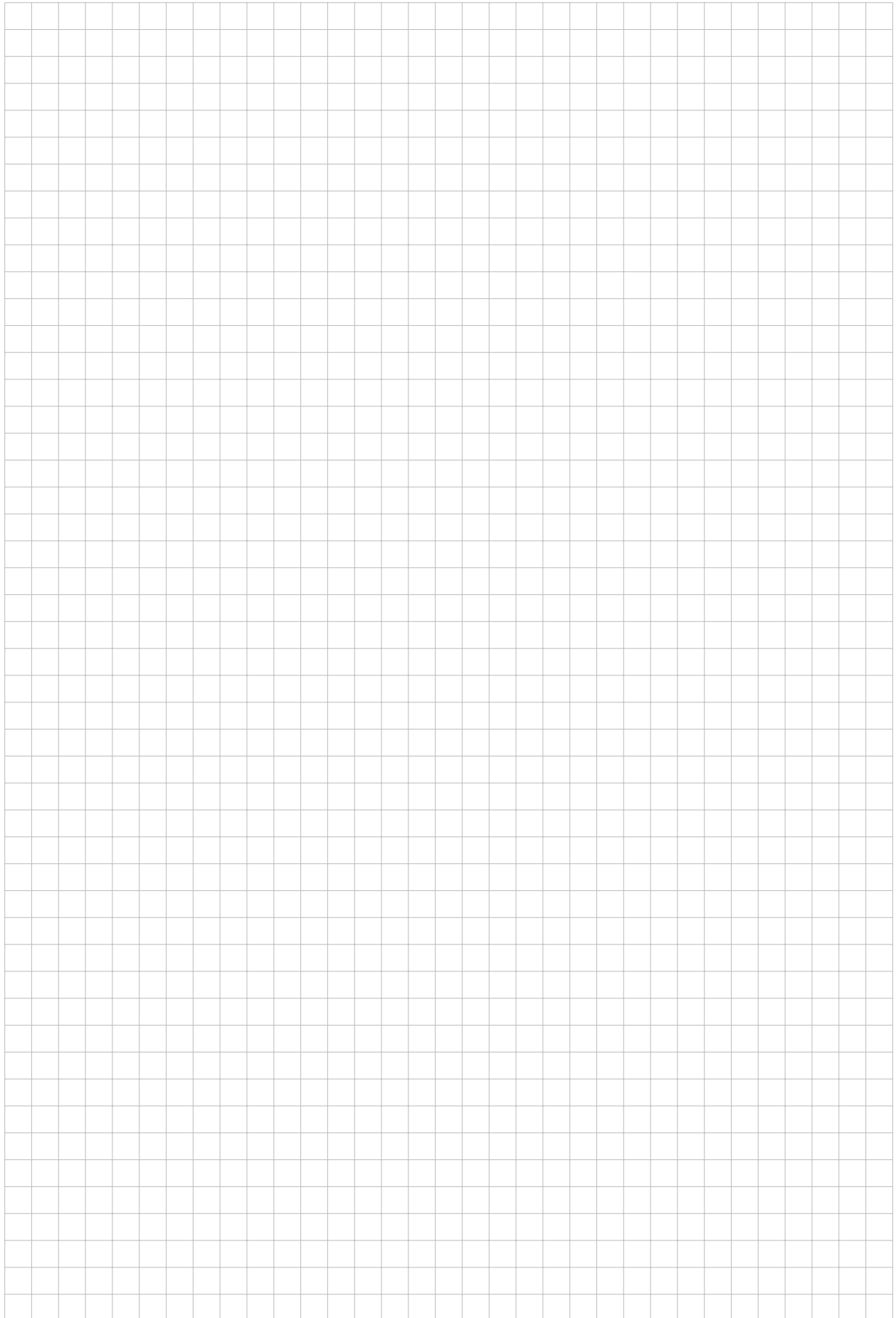
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (-x - 2y, 3x + 4y).$$

- $$R = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$



+1/10/51+







Question 9: *Cette question est notée sur 7 points.*

	.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5		.	5
	0		1		2		3		4		5		6		7														

(a) Calculer les termes généraux des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sachant que :

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ v_0 = -13 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}v_n. \end{cases}$$

(b) A partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 0$?

